EQUATIONS DIOPHANTIENNES

Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Points d'un plan de $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^3$.

1) On considère l'équation en nombres entiers

$$(E): \quad 35x + 54y - 11z = 0.$$

a) On fixe l'entier z. En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver, en fonction de z, un couple d'entiers (x_0, y_0) solution de l'équation $35x + 54y = 11z$.

b) En déduire toutes les solutions entières de (E).

2) On rappelle que le produit cartésien $\mathbb{Z}^2$ est structuré en groupe pour la loi produit

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall (c,d) \in \mathbb{Z}^2 \quad (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d),$$

et qu'il en est de même du produit cartésien $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^3 = (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{Z}^2 & \to & (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^3 \\ & (u,v) & \mapsto & (187\,\dot{v} - 54\,\dot{u}, 35\,\dot{u} - 121\,\dot{v}, \dot{v}). \end{array}$$

a) Montrer que φ est un homomorphisme de groupes.

b) Déterminer le noyau $\operatorname{Ker}\varphi$ de φ.

c) On pose $H = (13\mathbb{Z}) \times (13\mathbb{Z})$. Quel est le cardinal de l'ensemble quotient $\mathbb{Z}^2/H$? L'homomorphisme φ est-il surjectif ?

3) Chercher une paramétrisation de l'ensemble S des solutions de l'équation $35\,\dot{x} + 54\,\dot{y} - 11\,\dot{z} = \dot{0}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. Quel est le cardinal de S ? Aurions-nous pu prévoir ce résultat ?

Solution :

[0] [ueqh0003] Dany-Jack Mercier (ext. Examen OPA8, DEUG 1ère année, session juin 1999)

1)a)
$$54 = 35 + 19$$
$$35 = 19 \times 1 + 16$$
$$19 = 16 \times 1 + 3$$
$$16 = 3 \times 5 + 1$$

d'où, en remontant les calculs : $1 = 35 \times 17 - 11 \times 54$

Par suite $35 \times (17 \times 11z) + 54 \times (-11 \times 11z) = 11z$

$35 \times (187z) + 54(-121z) = 11z$

On peut prendre $(x_0, y_0) = (187z, -121z)$

1.b)

$(E) \Leftrightarrow 35x + 54y = 11z \Leftrightarrow 35x + 54y = 35(187z) + 54(-121z)$

$\Leftrightarrow 54(y + 121z) = 35(187z - x)$

$\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{Z} \begin{cases} y + 121z = 35u \\ 187z - x = 54u \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{Z} \begin{cases} x = 187z - 54u \\ y = 35u - 121z \end{cases}$

Les solutions de (E) seront :

$$\boxed{(x, y, z) = (187v - 54u,\ 35u - 121v,\ v) \quad \text{où } u, v \in \mathbb{Z}}$$

2.a) (...)

2.b) $(u,v) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \begin{cases} 187\dot{v} - 54\dot{u} = \dot{0} \\ 35\dot{u} - 121\dot{v} = \dot{0} \\ \dot{v} = \dot{0} \end{cases} \Rightarrow 35\dot{u} = \dot{0} \Rightarrow 9\dot{u} = \dot{0}$

$\Downarrow$

$\dot{u} = \dot{0}$

puisque $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ est un corps et $\dot{9} \neq \dot{0}$.

Ainsi $\operatorname{Ker} f = \{(u,v) \ / \ \dot{u} = \dot{v} = \dot{0}\} = (13\mathbb{Z}) \times (13\mathbb{Z}) = H$

2.c) $\# \mathbb{Z}^2 / (13\mathbb{Z})\times(13\mathbb{Z}) = 13^2$

car :

① $\forall \dot{\overline{(x,y)}} \in \mathbb{Z}^2/(13\mathbb{Z})\times(13\mathbb{Z})$ $\exists \dot{\overline{(a,b)}}$ avec $a,b \in \{0,\dots,12\}$ $\dot{\overline{(x,y)}} = \dot{\overline{(a,b)}}$

② Si $a,b,c,d \in \{0,\dots,12\}$, $\dot{\overline{(a,b)}} = \dot{\overline{(c,d)}} \Leftrightarrow (a,b)=(c,d)$.

φ n'est ~~donc~~ pas surjective ~~et~~ puisque ~~[illegible]~~. Par décomposition canonique,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \left(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}\right)^3 \\
\mathbb{Z}^2/(13\mathbb{Z})\times(13\mathbb{Z}) \arrow[r, "\tilde{\varphi}", "\sim"'] & \operatorname{Im}\varphi \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

donc $\# \operatorname{Im}\varphi = \# \mathbb{Z}^2/(13\mathbb{Z})\times(13\mathbb{Z}) = 13^2$, et $\#\left(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}\right)^3 = 13^3$. □

~~$S = \{ (11\dot{u}+5\dot{v}, 9\dot{u}+9\dot{v}, \dot{w}) / (u,v) \in \{0,\dots,12\}^2 \}$~~.

FIN

On pouvait prévoir ce résultat : l'équation $35\dot{x} + 54\dot{y} - 11\dot{z} = \dot{0}$ définit un hyperplan de $\left(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}\right)^3$, donc un sev de dim 2 dans $\left(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}\right)^2$. Ce sev aura 13^2 éléments.

3)

$$(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \in S \iff 35\dot{x} + 54\dot{y} - 11\dot{z} = \dot{0}$$

$$\iff \exists t \quad 35\dot{x} + 54\dot{y} - 11\dot{z} = 13t$$

$$\iff \exists t \quad 35x + 54y = 11z + 13t$$

~~Une sol.p~~

D'après 1.a) : $35 \times 17 - 11 \times 54 = 1$

donc $35x_1 + 54y_1 = 11z + 13t$

avec $(x_1, y_1) = (17(11z+13t), -11(11z+13t))$

$$(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \in S \iff \exists t \quad 35x + 54y = 35x_1 + 54y_1$$

$$\iff \exists t \quad 35(x - x_1) = 54(y_1 - y)$$

$$\iff \exists t, s \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} x - x_1 = 54s \\ y_1 - y = 35s \end{cases}$$

$$\iff \exists t, s \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} x = 187z + 221t + 54s \\ y = -121z - 143t - 35s \\ z = z \end{cases}$$

$$\iff \exists u, v, w \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} x = 187w + 221u + 54v \\ y = -121w - 143u - 35v \\ z = w \end{cases}$$

$$\boxed{(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \in S \iff \exists u, v, w \quad \begin{cases} \dot{x} = 5\dot{w} + 2\dot{v} \\ \dot{y} = 9\dot{w} + 4\dot{v} \\ \dot{z} = \dot{w} \end{cases}}$$

On obtient un paramétrage bijectif de S qui permet de conclure à $\# S = 5^2 = 25$.
En effet, l'application

$$\varphi : (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \longrightarrow S$$

$$(\dot{v}, \dot{w}) \longmapsto (\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = (5\dot{w} + 2\dot{v}, 9\dot{w} + 4\dot{v}, \dot{w})$$

est bijective (facile). $\square$

imp. pour OPA 8 session 99

Equations diophantiennes

Points d'un plan de $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$.

1) On considère l'équation en nombres entiers

$$(E): \qquad 32x + 85y + 7z = 0.$$

a) On fixe l'entier z. En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver en fonction de z un couple d'entiers (x_0, y_0) solution de l'équation $32x + 85y = -7z$.

b) En déduire toutes les solutions entières de (E).

2) On rappelle que le produit cartésien $\mathbb{Z}^2$ est structuré en groupe pour la loi produit

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall (c,d) \in \mathbb{Z}^2 \quad (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d),$$

et qu'il en est de même du produit $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3 = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{Z}^2 & \to & (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3 \\ & (u,v) & \mapsto & (85\dot{u} - 56\dot{v}, 21\dot{v} - 32\dot{u}, \dot{v}). \end{array}$$

a) Montrer que φ est un homomorphisme de groupes.

b) Déterminer le noyau $\operatorname{Ker}\varphi$ de φ.

c) Quel est le cardinal de l'ensemble quotient $\mathbb{Z}^2/(5\mathbb{Z}) \times (5\mathbb{Z})$? L'homomorphisme φ est-il surjectif ?

3) ~~En déduire~~ Trouver l'ensemble S des solutions de l'équation $32\,\dot{x} + 85\,\dot{y} + 7\,\dot{z} = \dot{0}$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, et préciser son cardinal. Aurions-nous pu prévoir ce résultat ?

Solution :

[0] [ueqh0004] Dany-Jack Mercier identique à ueqh0003 qui, lui, fait partie de l'examen OPA8, DEUG 1ère année, session 1999. Exercice pour préparer cet exercice en TD.

1.a) $\boxed{32x + 85y + 7z = 0}$ (E)

$$\begin{cases} 85 = 32 \times 2 + 21 \\ 32 = 21 \times 1 + 11 \\ 21 = 11 \times 1 + 10 \\ 11 = 10 \times 1 + 1 \end{cases}$$

donc $1 = 11 - 10 = 11 - (21 - 11) = 11 \times 2 - 21$

$= (32 - 21) \times 2 - 21 = 32 \times 2 - 21 \times 3$

$= 32 \times 2 - (85 - 32 \times 2) \times 3$

$\boxed{1 = 32 \times 8 + 85 \times (-3)}$

donc $32 \times (8 \times (-7z)) + 85 \times ((-3)(-7z)) = -7z$

$32 \times \underbrace{(-56z)}_{x_0} + 85 \underbrace{(21z)}_{y_0} = -7z$

1.b)

(E) $\Leftrightarrow$ $32x + 85y = 32(-56z) + 85(21z)$

$\Leftrightarrow$ $32(x + 56z) = 85(21z - y)$

$\Leftrightarrow$ $\exists u \begin{cases} x + 56z = 85u \\ 32u = 21z - y \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\exists u \in \mathbb{Z} \begin{cases} x = 85u - 56z \\ y = 21z - 32u \end{cases}$

<u>Solutions de (E) :</u>

$(x, y, z) = (85u - 56v, 21v - 32u, v)$ où $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$.

2.a) (...)

2.b) $(u,v) \in \operatorname{Ker}\varphi \iff \begin{cases} 85\dot{u} - 56\dot{v} = \dot{0} \\ 21\dot{v} - 32\dot{u} = \dot{0} \\ \dot{v} = \dot{0} \end{cases} \Rightarrow 32\dot{u} = \dot{0} \Rightarrow 2\dot{u} = \dot{0} \Rightarrow \dot{u} = \dot{0}$

donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \,/\, (u,v) \in (5\mathbb{Z})^2\}$.

2.c) $\mathbb{Z}^2 / (5\mathbb{Z})\times(5\mathbb{Z}) = \underbrace{\{\dot{(a,b)} \,/\, a,b \in \{0,\dots,4\}\}}$

on vérifie que tous ces éléments sont distincts entre eux 2 à 2 !

donc $\# \mathbb{Z}^2 / (5\mathbb{Z})\times(5\mathbb{Z}) = 5^2 = 25$

) Par déc. canonique :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3 \\ \mathbb{Z}^2 / (5\mathbb{Z})\times(5\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] & \operatorname{Im}\varphi \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

~~donc $\# S = \# \left(\mathbb{Z}^2 / (5\mathbb{Z})\times(5\mathbb{Z})\right) = 25$ et $S = \{(4\dot{u}, \dot{v}+3\dot{u}, \dot{v}) \,/\, (u,v) \in \{0,\dots,4\}\}$~~

donc $\operatorname{Im}\varphi$ de cardinal 25 est strict. inclus dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ de card 125 et φ n'est pas surjective.

3)

$(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \in S \iff \exists t \in \mathbb{Z} \quad 35x + 5(17y - t) + 7z = 0$

$\iff \exists t \in \mathbb{Z} \quad (x, 17y - t, z) \in S_E$ où S_E est l'ens. des sol. de (E)

$\iff \exists t, u, v \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} x = 85u - 56v \\ 17y - t = 21v - 32u \\ z = v \end{cases}$

.../...

$$(x,y,z) \in S \iff \exists t,u,v \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} x = 4v \\ y = v + 3u + t \\ z = v \end{cases}$$

$$\iff \exists t,u,v \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} x = 4v \\ y = 3v + 4u + 3t \\ z = v \end{cases}$$

Comme 4 et 3 sont premiers entre eux, il existe u_0, t_0 tq $4u_0 + 3t_0 = 1$ donc tout v s'écrira $v = 4\,\overline{u_0 v} + 3\,\overline{t_0 v}$.
Cela prouve que :

$$(x,y,z) \in S \iff \exists\, u, v \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \quad \begin{cases} x = 4v \\ y = 3v + u \\ z = v \end{cases}$$

On vérifie facilement que l'application

$$\varphi : \left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)^2 \longrightarrow S$$

$$(v, u) \longmapsto (x,y,z) = (4v,\ 3v+u,\ v)$$

est bijective, d'où

$$\boxed{\#S = \#\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)^2 = 25}$$